Série de Taylor

Érick Ghuron

Abril 2022

Introdução

A **série de Taylor**, ou polinômio de Taylor, é uma forma de escrever funções como uma série de potências.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1}$$

Onde $f^{(n)}$ é a enésima derivada da função f, e a é o ponto onde essa função será expandida. Temos um caso especial da série de Taylor, quando $a = 0$, que é chamado de **série de Maclaurin**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n \tag{2}$$

Aplicações

Exemplo 1

Encontre a série de Maclaurin para a função $f(x) = e^x$

Sabendo que $f(x)$ é a função exponencial as suas derivadas de n-ordem serão iguais, então

$$f^{(n)}(x) = e^x$$
$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Então temos a série de Maclaurin fica dessa maneira:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Assim se expandimos a exponencial em série de Taylor, ficaremos assim

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Podemos plotar o gráfico dessa função e seus polinômios de Taylor até a terceira ordem.

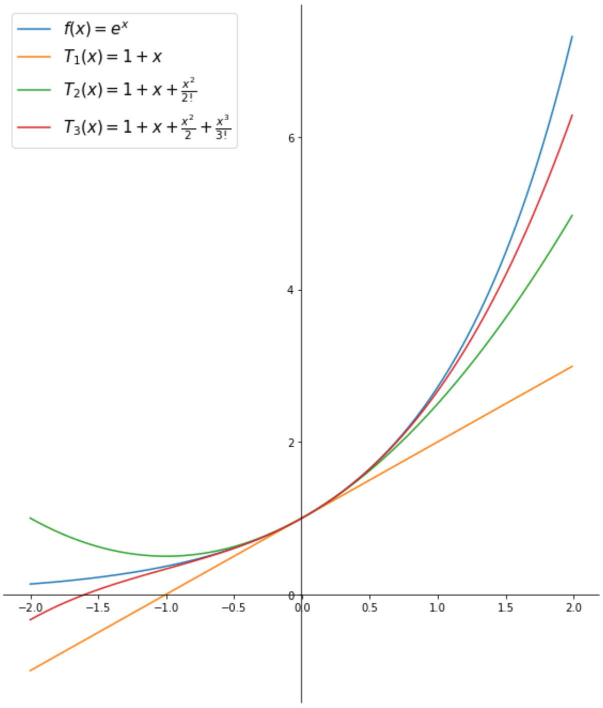

Figura 1: Gráfico de $f(x) = e^x$

Percebemos que para os pontos próximos de zero (por ser uma série de Maclaurin, temos que o ponto onde a curva é modelada $a = 0$) com um polinômio de ordem baixa consegue ser uma boa aproximação para a curva $f(x)$. Porém a medida que nos afastamos desse ponto, precisaremos de polinômios de ordem superior.

Exemplo 2

Encontre a série de Maclaurin para a função $f(x) = \sin x$

Percebemos que suas derivadas possui um tipo de periodicidade.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Agora podemos escrever a série de Maclaurin da seguinte forma

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

E por fim temos

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Também podemos plotar o gráfico dessa função para analisarmos o entorno

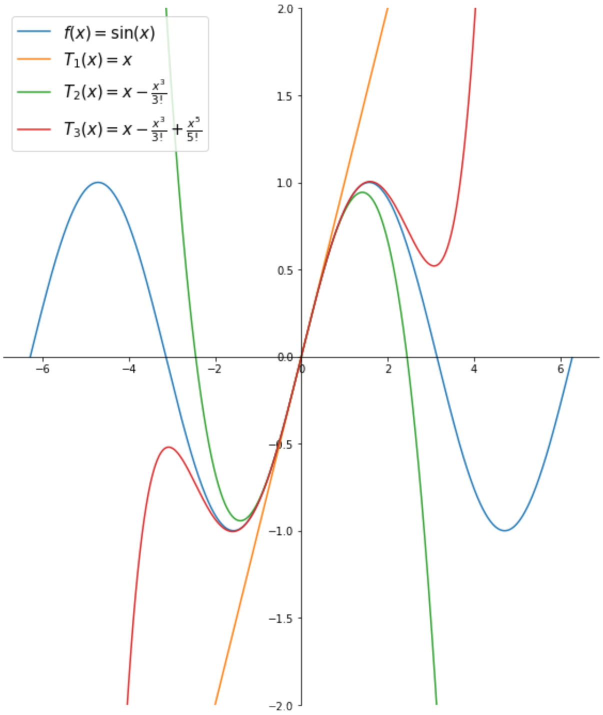

Figura 2: Gráfico de $f(x) = \sin(x)$

Como no exemplo anterior, vimos que para esses polinômios pontos próximos a zero que são os melhores para modelar a curva. A medida que você se afasta dessa origem, os polinômios não ajustam de maneira satisfatória, assim precisando de polinômios de ordem maiores

Exemplo 3

Encontre a série de Maclaurin para a função $f(x) = \cos x$

Poderíamos fazer igual ao exemplo 2, porém é mais fácil derivar o resultado que obtemos anteriormente.

$$\cos(x) = \frac{d}{dx}(\sin(x)) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

Nesse caso essa derivada é bem trivial e com isso temos o seguinte resultado

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

Podemos expandir esse resultado para visualizarmos melhor a forma da série

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Também podemos plotar o gráfico dessa função para analisarmos o entorno

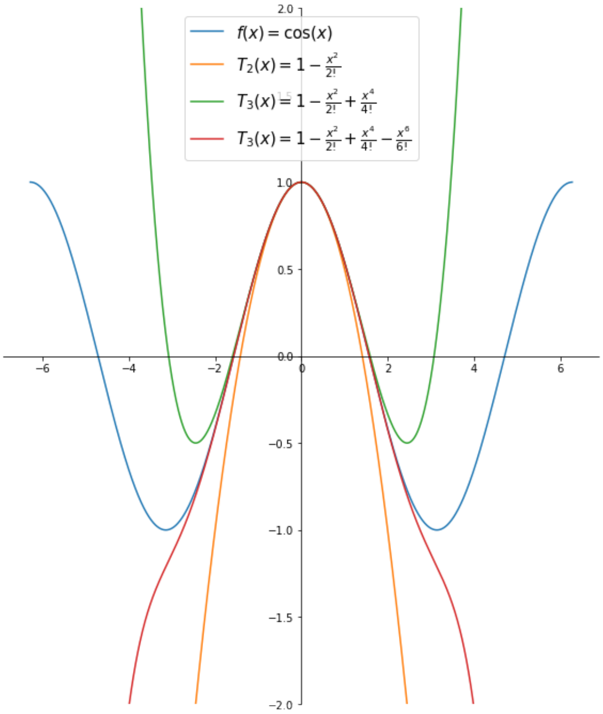

Figura 3: Gráfico de $f(x) = \cos(x)$

Exemplo 4

Represente graficamente $f(x) = \sin(x)$ em $a = \pi$ utilizando o polinômio de Taylor

Olhando as derivadas do problema:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) & f(\pi) &= 0 \\
f'(x) &= \cos(x) & f'(\pi) &= -1 \\
f''(x) &= -\sin(x) & f''(\pi) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(\pi) &= 1
\end{aligned}$$

E esse padrão se repete periodicamente, como foi visto no exemplo 2.

Assim temos que $\sin(x)$ em torno de π é

$$f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \cdots$$

Substituindo os valores

$$\sin(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 - \frac{1}{5!}(x-\pi)^5 \cdots$$

Assim podemos construir um gráfico para essa função

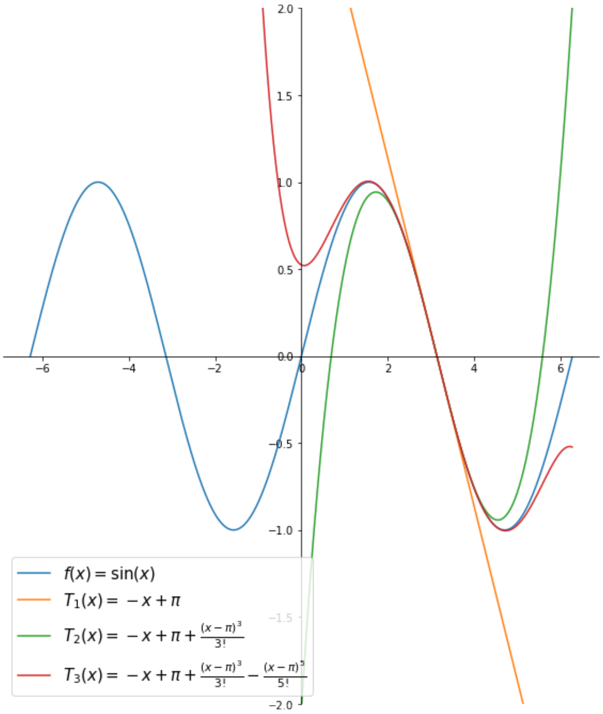

Figura 4: Gráfico de $f(x) = \sin(x)$

Perceba que como a escolha do nosso a foi π o gráfico é modelado no entrono desse ponto.

Exemplo 5

Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^k$, onde k é um número real qualquer.

Verificando a derivada da $f(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^k & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= k(1+x)^{k-1} & f'(0) &= k \\
f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1) \\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k-1)(k-2) \\
&. & &. \\
f^{(n)}(x) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{aligned}$$

Portanto a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^k$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n$$

Essa série é chamada de **série binomial**, uma série que converge quando o $|x| < 1$ e diverge quando $|x| > 1$

A notação tradicional para os coeficientes na série binomial é

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

Então de maneira geral temos:

$$\boxed{(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \cdots}$$

Se k é um numero real e $|x| < 1$